Fastperiodische Funktionen, Quadratur, Interpolation und Gleichverteilung auf LCA-Gruppen

Peter Zinterhof, Salzburg

peter.zinterhof@plus.ac.at

Keywords: *Uniform distribution of sequences, almost periodic functions, LCA-groups, Diaphony, Reproducing Kernel Hilbert Spaces, Totality and Dispersion of sequences, Numerical Integration, Interpolation of functions, Bohr compactification*

Zusammenfassung

Es werden auf lokalkompakten abelschen Gruppen, LCAG, separable Räume fastperiodischer Funktionen und ein Konzept der $\hat{G}$ -Gleichverteilung von Folgen betrachtet, wobei als Gütemaße für die

Gleichverteilung Diaphonien eingeführt werden. Die Diaphonien führen zu Hilberträumen mit reproduzierendem Kern und in weiterer Folge zu scharfen Abschätzungen für Quadraturmethoden für fastperiodische Funktionen auf LCAG. In weiterer Folge wird ein Zusammenhang zwischen Gleichverteilung, Dichte und Totalität von Folgen in LCAG hergestellt, was auch zu Interpolationsmethoden für fastperiodische Funktionen führt, wobei die Fehlerabschätzungen die eingeführte numerische Totalität einer Folge von Stützstellen und eine Hilbertraum-Norm der fastperiodischen Funktionen benutzen. Wesentliches Hilfsmittel ist die Bohr-Kompaktifizierung der LCAG. Als konkrete Beispiele werden $\mathbb{Z}$ als LCAG, die Bohr-Kompaktifizierung $\overline{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$ näher betrachtet. Es werden Approximationsmethoden für das Mittel von Funktionen im Sinne der Bohr-Kompaktifizierung mit Fehlerabschätzung angegeben. Schließlich werden auf monothetischen Gruppen Banachräume stetiger Funktionen und dort bestmögliche Quadraturmethoden mit $R_N = O(1/N)$ angegeben.

Sei $G = \{x, y, \ldots\}$ eine lokalkompakte abelsche Gruppe, LCAG, und $\hat{G} = \{\gamma, \ldots\}$ die duale Gruppe, Γ die diskretisierte Gruppe zu $\hat{G}$. $\overline{G} = \{\overline{x}, \overline{y}, \ldots\}$ sei die Bohr-Kompaktifizierung von $G, \overline{G} = \hat{\Gamma}$. Ist H_1 eine abgeschlossene Untergruppe von $\overline{G}$, so ist der Annihilator von $H_1, Ann(H_1) = \{\gamma \in \hat{G} : \gamma(x) = 1, x \in H_1\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\hat{G}$. Es gilt $Ann(Ann(H_1)) = H_1$.

Dann gilt allgemein für LCAG

$$G/H_1 \cong \widehat{Ann(H_1)}, H_1 = \widehat{\hat{G}/Ann(H_1)} \tag{1}$$

G ist dicht in $\bar{G}$. Diese grundsätzlichen Ergebnisse findet man im Klassiker W.RUDIN, Fourier Analysis on Groups [6]

Die Menge P der fastperiodischen Funktionen, $f : G \to \mathbb{C}$, kann definiert werden als die Menge der auf G stetigen Funktionen f(x), die sich stetig auf $\bar{G}$ fortsetztzten lassen. Ist also $f(\bar{x} \in C(\bar{G}))$, so ist die Einschränkung von f auf G stetig auf der LCAG G. Dies ist gleichbedeutend damit, dass sich $f(\bar{x})$ und damit f(x) gleichmäßig durch trigonometrische Polynome, also durch endliche Linearkombinationen von Charakteren approximieren lässt. Da $\widehat{G}$ bzw. Γ die Punkte trennt, ist dies eine Konsequenz des Satzes von Weierstraß-Stone.

Um Gleichverteilung von Folgen auf G bzw. $\bar{G}$ beschreiben zu können, benötigen wir separable Räume. Wir betrachten daher abzählbare Untergruppen $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Sei $\bar{H}_1 = Ann(\Gamma_1) = \{\bar{x} : \gamma(\bar{x}) = 1\}$. Sei $H_1 = \{x \in G, \gamma \in \Gamma_1 : \gamma(x) = 1\}$, dann ist $H_1 \subseteq \bar{H}_1$. Sei $\bar{G}/\bar{H}_1 = \bar{G}_1$, dann ist gemäß ((1)) $\bar{G}_1 \cong \widehat{Ann(Ann(\Gamma_1))} = \widehat{\Gamma_1}, \bar{G}_1$ also kompakte Gruppe. Da Γ_1 abzählbar ist, ist $\bar{G}_1$ separabel, also metrisierbar.

Die Elemente $\bar{X}$ von $\bar{G}_1$ sind die Nebenklassen modulo $\bar{H}_1$: $\bar{X} = \{\bar{y} : \bar{y} - \bar{x} \in \bar{H}_1\}$. Jeder Funktion $F(\bar{X}) \in C(\bar{G}_1)$ entspricht umkehrbar eindeutig eine stetigen Funktion $f(\bar{x}) \in C(\bar{G})$, für die $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ gilt, falls $\bar{y} - \bar{x} \in \bar{H}_1$. Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 1 *$\bar{H}_1$ heißt Periode der aus $F(\bar{X})$ resultierenden Funktion $f(\bar{x})$. $H_1 =$*

$\bar{H}_1 \cap G$ ist die Periode der f(x) in G.

Wir definieren nun Räume fastperiodischer Funktionen:

Definition 2 *$P(\Gamma_1) = \{f(x), F(\bar{X}) \in C(\bar{G_1})\}$. Die fastperiodischen Funktionen $f(x) \in P(\Gamma_1)$ sind also die Einschränkungen der $f(\bar{x}) \in C(\bar{G})$, wobei $F(\bar{X}) \in C(\bar{G_1})$ und $\varphi(\bar{x}) = \bar{X} = \{\bar{y} : \bar{y} - \bar{x} \in \bar{H_1}\}$.*

Satz 1 *Jede fastperiodische Funktion $f(x) \in P$ liegt in einem $P(\Gamma_1)$, wobei $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ abzählbar ist.*

Beweis: Zu jedem $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ gibt es $\gamma_1, \ldots, \gamma_{M(n)}$ und dazu ein trigonometrisches Polynom, gebildet aus $\gamma_1, \ldots, \gamma_{M(n)}$, welches $f(x) \in P$ gleichmäßig mit einem Fehler höchstens $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ approximiert. Für $n \to \infty$ resultiert eine Folge von Charakteren $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_M, \ldots\}$, deren endliche Linearkombinationen die Funktionen $f(x) \in P$ beliebig gleichmäßig approximieren.

Dann sei Γ_1 die von $\gamma_1, \ldots, \gamma_M, \ldots$ erzeugte diskrete Untergruppe von Γ. Offenbar ist dann $f(x) \in P(\Gamma_1)$.

Wir statten nun die betrachteten Gruppen mit den entsprechenden Haarmaßen aus: Sei μ_G das Haarmaß der LCAG G, $\mu_{\bar{G}}$ und $\mu_{\bar{G_1}}$ seien die Haarmaße von $\bar{G}$ und $\bar{G_1}$ respektive. Die Charaktere $\alpha(\bar{X})$ der Gruppe $\bar{G}$ entsprechen den Charakteren $\alpha(\bar{x})$, die auf $\bar{H_1}$ trivial sind, $\alpha(\bar{y}) = 1$ für $\bar{y} \in \bar{H_1}$. Sei $\alpha_0(\bar{X})$ der triviale Charakter von $\bar{G_1}$, $\alpha_0(\bar{X}) = 1$ für $\bar{X} \in \bar{G_1}$. Bezeichnen wir mit α die Charaktere aus Γ_1, so ist für $\bar{x} \in \bar{X}$ $\alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{X})$, also $\alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{y})$ für $\bar{x} - \bar{y} \in \bar{H_1}$, da $\bar{H_1}$ der Annihilator von Γ_1 ist. Ist $f(x) \in P(\Gamma_1)$, also $F(\bar{X}) \in C(\bar{G_1})$, und sind die Fourierkoeffizienten von $F(\bar{X})$ gegeben durch

$$\widehat{F}(\alpha) = \int_{\bar{G}_1} F(\bar{X})\alpha(-\bar{X})d\mu_{\bar{G}_1}(\bar{X}) \tag{2}$$

dann gilt:

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\alpha\in\Gamma_1} \widehat{F}(\alpha)\alpha(\bar{x}) \tag{3}$$

Insbesondere gilt für $f(x) \in P(\Gamma_1)$:

$$\int_{\bar{G}} f(\bar{y})d\mu_{\bar{G}}(\bar{x}) = \int_{\bar{G}_1} F(\bar{X})d\mu_{\bar{G}_1}(\bar{X}) \tag{4}$$

Wir bezeichnen in naheliegender und bekannter Weise:

$$\int_{\bar{G}} f(\bar{y})d\mu_{\bar{G}}(\bar{x}) = \underset{x}{M} f(x) \tag{5}$$

als das Mittel von $f(x) \in P(\Gamma_1)$ über G.

Nun zur Gleichverteilung von Folgen: Bekanntlich heißt eine Folge $(\bar{X}_m)_m$ in der kompakten Gruppe $\bar{G_1}$ gleichverteilt, wenn für alle $F(\bar{X}) \in C(\bar{G}_1)$ gilt:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} F(\bar{X}_m) = \int_{\bar{G}_1} F(\bar{X})d\mu_{\bar{G}_1}(\bar{X}) \tag{6}$$

gleichbedeutend mit

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \alpha(\bar{X}_m) = 0 \tag{7}$$

für jeden nichttrivialen Charakter $\alpha \in \Gamma_1$. Es ergibt sich die naheliegende Definition:

Definition 3 *$(\bar{x}_m)_m$ ist genau dann in $\bar{G}$ Γ_1-gleichverteilt, wenn für die Fortsetzung jeder fastperiodischen Funktion $f(x) \in P(\Gamma_1)$ auf $\bar{G}$ gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(\bar{x}_m) = \int_{\bar{G}_1} f(\bar{X}) d\mu_{\bar{G}_1}(\bar{X}) = M(f) \tag{8}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \alpha(\bar{x}_m) = 0 \tag{9}$$

für jeden nichttrivialen Charakter $\alpha \in \Gamma_1$.

Speziell folgt der

Satz 2 *Die Folge $(x_m)_m$ aus G ist genau dann Γ_1-gleichverteilt, wenn für jede fastperiodische Funktion $f(x) \in P(\Gamma_1)$ gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(x_m) = \underset{x}{M}(f(x)) \tag{10}$$

Beweis: G ist dicht in $\bar{G}$, $f(\bar{x})$ ist die eindeutige Fortsetzung von $f(x) \in P(\Gamma_1)$ auf $f(\bar{x}) \in C(\bar{G})$, $\underset{x}{M}(f(x)) = \int_{\bar{G}} f(\bar{x}) d\mu_{\bar{G}}(F)$.
Bemerkung: Die Gleichverteilung von $(x_m)_m$ bzw. $(\bar{x}_m)_m$ ist modulo H_1 bzw. $\bar{H}_1$.

Wir führen nun Diaphonien zur Quantifizierung der Güte der Γ_1-Gleichverteilung von Folgen ein:
Sei $A(\bar{X}) \in L_2(\bar{G}_1)$ und $K(\bar{X}) = A(\bar{X}) * \overline{A(-\bar{X})} = A(\bar{X}) * A(\bar{X})^*$. Dann ist

$$A(\bar{X}) = \sum_{\alpha\in\Gamma_1} \hat{A}(\alpha)\alpha(\bar{X}), \quad K(\bar{X}) = \sum_{\alpha\in\Gamma_1} \hat{K}(\alpha)\alpha(\bar{X}) \tag{11}$$

mit $\hat{K}(\alpha) = \left|\hat{A}(\alpha)\right|^2$.

$K(\bar{X})$ ist also stetig auf $\bar{G}_1$ mit absolut konvergenter Fourierreihe und ist positiv definit. Wir setzen noch voraus, dass $\hat{A}(\alpha) \neq 0 \neq \tilde{K}(\alpha), \alpha \in \Gamma_1$, und sei $\tilde{K}(\alpha_0) = 1$ für den trivialen Charakter α_0 von $\bar{G}_1$.

Definition 4 *Solche Kerne bezeichnen wir als zulässig.*

Dem Kern $K(\bar{X})$ auf $\bar{G}_1$ entspricht die Funktion $k(\bar{x})$ auf $P(\Gamma_1)$.

Den Folgen $(x_m)_m$ und $(\bar{x}_m)_m$, $x_m \in G, \bar{x}_m \in \bar{G}$, entsprechen die Folgen $(\bar{X}_m)_m$ als Restklassen mod $\bar{H}_1$.

Wir definieren nun die $K - \Gamma_1$-Diaphonie dieser Folgen.

Definition 5

$$F_M = \left| \frac{1}{M^2} \sum_{m_1=1}^{M} \sum_{m_2=1}^{M} K(\bar{X}_{m_1} - \bar{X}_{m_2}) - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

Offensichtlich gilt der:

Satz 3 $(x_m)_m, (\bar{x}_m)_m, (\bar{X}_m)_m$ *ist* Γ_1*-gleichverteilt, genau wenn* $\lim_{M\to\infty} F_M = 0$.

Weiter unten geben wir Beispiele. Der Kern $K(\cdot) = a * a^*(\cdot)$ ist nach dem Satz von Bochner positiv definit und führt zu Hilberträumen mit reproduzierendem Kern.

Ich beziehe mich im Folgenden auf meinen Text [7] dazu in preprints.zinterhof.com, sodass ich tunlichst auf Wiederholungen verzichten kann. Wichtige Quellen sind nach wie vor [1] und [2].

Wir betrachten $\bar{G}_1$ mit der diskreten dualen Gruppe $\Gamma_1 = \widehat{\bar{G}}_1$, die Charaktere in Γ_1 bezeichnen wir mit $\alpha, \Gamma_1 = \alpha \in \Gamma_1$, der triviale Charakter sei α_0. Sei $K(\bar{X})$

gemäß (11) definiert und $K(\bar{X},\bar{Y}) = K(\bar{X}-\bar{Y})$, der positiv definite Kern auf $\bar{G}_1 \times \bar{G}_2$ zu $K(\bar{X})$, der einen Hilbertraum H_K stetiger Funktionen $F(\bar{X})$ erzeugt, sodass $K(\cdot,\bar{X}) \in H_K$ für alle $\bar{X} \in \bar{G}$ und $< K(\cdot,\bar{Y}), K(\cdot,\bar{X}) >= K(\bar{X},\bar{Y})$. Wir erhalten eine ONB durch

$$\varphi_\alpha(\bar{X}) = \hat{A}(\alpha)\alpha(\bar{X}), \alpha \in \Gamma_1 \tag{13}$$

sodass gilt

$$< \varphi_{\alpha_1}(\bar{X}), \varphi_{\alpha_2}(\bar{X}) > = \delta_{\alpha_1\alpha_2} \tag{14}$$

Für Funktionen $F_1(\bar{X}), F_2(\bar{X}) \in H_K$ gilt dann

$$\begin{aligned} F_{1,2}(\bar{X}) &= \sum_\alpha \overset{o}{F}_{1,2}(\alpha)\varphi(\bar{X}) \\ < F_1, F_2 > &= \sum_\alpha \overset{o}{F}_1(\alpha)\bar{\overset{o}{F}}_2(\alpha) \\ ||F_{1,2}|| &= \left(\sum_\alpha \overset{o}{F}_{1,2}(\alpha)\bar{\overset{o}{F}}_{1,2}(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_\alpha \left|\overset{o}{F}_{1,2}(\alpha)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{15}$$

Definition 6 $d(\bar{X},\bar{Y}) = d_K(\bar{X},\bar{Y}) = \left|\left|K(\cdot,\bar{X}) - K(\cdot,\bar{Y})\right|\right|$.

Offenbar ist $d(\cdot,\cdot)$ eine Pseudometrik. Da die $\hat{A}(\alpha) \neq 0$ für $\alpha \in \Gamma_1$, folgt nach kurzer Rechnung: $d(\bar{0},\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{0}$. die von d auf $\bar{G}_1$ erzeugte Topologie ist vergleichbar mit der Topologie von $\bar{G}_1$. Da jeder kompakte Hausdorff-Raum eine feinste kompakte und gröbste T_2-Topologie ist, stimmen die beiden Topologien überein.

Es gilt

Satz 4 *Der Hilbertraum H_K trennt die Punkte.*

Beweis: Angenommen es gibt $\bar{X} \neq \bar{Y} \in \bar{G}_1$, sodass für alle $F(\cdot) \in H_K$ gilt $F(\bar{X}) = F(\bar{Y})$. Dann gilt für alle $F(\cdot) : 0 = F(\bar{X}) - F(\bar{Y}) =< F(\bar{\top}), K(\bar{\top}, \bar{X}) - K(\bar{\top}, \bar{Y}) >$, woraus $\left|\left|K(\bar{\top}, \bar{X}) - K(\bar{\top}, \bar{Y})\right|\right| = 0$ folgt, also $d(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$.
Der Widerspruch beweist den Satz.
Wir definieren nun die für das Weitere wichtige Totalität einer Folge $(\bar{X}_m)_m, \bar{X}_m \in \bar{G}_1$:

Definition 7 *Die Folge $(\bar{X}_m)_m$ aus $\bar{G}_1$ heißt (K-) total, wenn die Folge $(K(\cdot, \bar{X}_m))_m$ in H_K total ist.*

Es gilt:

Satz 5 *$(\bar{X}_m)_m$ ist genau dann total, wenn für $F(\cdot) \in H_K$ aus $F(\bar{X}_m) = 0, m \in \mathbb{N}$, folgt $F(\cdot) = 0$.*

Zum Beweis genügt es festzuhalten, dass $F \perp K(\cdot, \bar{X}_m)$ für $m \in \mathbb{N}$ gleichbedeutend ist mit $< F(\cdot), K(\cdot, \bar{X}_m) >= F(\bar{X}_m) = 0$. Man zeigt leicht den Satz:

Satz 6 *Ist die Folge $(K(t, x_n))_n$ in H_K total, so lässt sich eine linear unabhängige ebenfalls totale Teilfolge $(K(t, x_{n_j}))_j$ sukzessiv auswählen.*

Beweis: Seien $K(t, x_{n_1}), \ldots, K(t, x_{n_j})$ bereits als linear unabhängig erkannt, dann sei $x_{n_{j+1}} = x_{n_j+1}$, falls $K(t, x_{n_1}), \ldots, K(t, x_{n_j}), K(t, x_{n_j+1})$ linear unabhängig sind, sonst gehe zu x_{n_j+2}. Diese Folge ist dann ebenfalls total.

Wir erinnern nun an

Satz 7 *Ist $\bar{G}_1$ eine separable kompakte Gruppe, so ist jede in $\bar{G}_1$ gleichverteilte Folge auch dicht in $\bar{G}_1$. [3]*

Wir erinnern nun an die Definition der Dispersion einer Folge im kompakten metrischen Raum. [3][4]

Definition 8 *Sei* $x_1, x_2, \dots, x_M, \dots \in \bar{G}_1$

$$\delta_M = \underset{x \in \bar{G}_1}{max} \underset{n=1,\dots,M}{min} d(x, x_m) \tag{16}$$

Es Gilt $\delta_M \to 0$ für $M \to \infty$, genau wenn die Folge $(x_m)_m$ in $\bar{G}_1$ dicht ist. In [4] wird die Dispersion δ_M ausführlich behandelt.

Wir spezialisieren nun die in [7] dargestellten und für Hilberträume mit reproduzierendem Kern über kompakten metrischen Räumen allgemeiner bewiesener Resultate für die kompakte Gruppe $\bar{G}_1$:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Folge $K(t, x_n), n \in \mathbb{N}, t, x_n \in \bar{G}_1$, linear unabhängig. Wir wenden das Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren an und erhalten eine Folge $\tau_n(t), n \in \mathbb{N}$, mit $< \tau_n(t), \tau_m(t) >= \delta_{nm}$, wobei gilt $\tau_n(x_m) = 0$ für $m < n$. Es gilt dann der

Satz 8 $(x_n)_n$ *ist genau dann total in* H_K*, wenn gilt*

$$K(t, x) = \sum_n \tau_n(t) \overline{\tau}_n(x) \tag{17}$$

Wir setzen nun spezieller als in [7] voraus, dass $(x_n)_n$ total ist. Der Kern $K_N(t, x) = \sum_{n=1}^{N} \tau_n(t) \overline{\tau}_n(x)$ reproduziert den Hilbertraum $H_{K,N} = span\{K(t, x_1), \dots, K(t, x_N)\}$, während $K_N^\perp = \sum_{n>N} \tau_n(t) \overline{\tau}_n(x)$ den Raum $H_{K,N}^\perp = span\{K_{N+1}(t, x), \dots\}$ reproduziert. Bezeichnet man mit

$$T_N = \left(\max_x K^{\perp}_N(x,x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

die Totalität"der Punkte $x_1, \ldots, x_M$, so gilt:

Satz 9 *$(x_n)_n$ ist genau dann total in H_K, wenn* $\lim\limits_{M\to\infty} T_N = 0$

In [7] wurde allgemein für kompakte metrische Räume der Satz gezeigt:

Satz 10 $T_M \leq \delta_M$

Qualitativ gilt also: Ist die Folge $(x_n)_n$ in einer kompakten Gruppe gleichverteilt, so ist $(x_n)_n$ auch dicht in der Gruppe und folglich auch total. Kurz zur numerischen Quadratur auf Gruppen:

Für Funktionen $F \in H_K$ gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sofort der

Satz 11 $|R_M| = \left|\frac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M} F(\bar{X}_m) - \int\limits_{\bar{G}_1} F(\bar{X})d\mu(\bar{X})\right| = ||F||F_N$

Der Sachverhalt überträgt sich sofort auf die von Γ_1 erzeugten stetigen Funktionen auf der Bohr-Kompaktifizierung $\bar{G}$ von G und modulo $\bar{H}_1$ beziehungsweise modulo $H_1, H_1 = \bar{H}_1 \cap G$, und auf die Γ_1-fastperiodischen Funktionen auf G selbst.

Besonderes Interesse ruft die Interpolation von (fastperiodischen) Funktionen hervor Wir benötigen einige Resultate aus [7], die wie ohne Beweise hier wiedergeben.

Sei $x_1^{,} \ldots, x_N$ gegeben und G_N die Gramsche Matrix der als linear unabhängig vorausgesetzten $K(x,x), \ldots, K(x,x_n)$.

$$G_N = (< K(x,x_m), K(x,x_n) >)_{m,n=1}^{N} = (K(x_n,x_m))_{m,n=1}^{N} \tag{19}$$

Die duale Basis von $K(x,x_1),\dots,K(x,x_N)$ von $H_{K,N}, H_{K,N} = span\{K(x,x_1),\dots,K(x,x_N)\}$ sei $l_1(x),\dots,l_N(x)$ bezeichnet und ergibt sich bekanntlich als

$$\begin{pmatrix} l_1(x) \\ \dots \\ l_N(x) \end{pmatrix} = G_N^{-1} \begin{pmatrix} K(x,x_1) \\ \dots \\ K(x,x_N) \end{pmatrix} \tag{20}$$

Es gilt also

$$< l_m(x), K(x,x_m) >=< l_m(x), K_N(x,x_n) >= l_m(x_n) = \delta_{mn} \tag{21}$$

Für $f_N(x) \in H_{K,N}$ gilt

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_N(x_n) l_n(x) \tag{22}$$

Insbesondere gilt

$$K_N(x,y) = \sum_{n=1}^{N} l_n(x) K(x_n, y) \tag{23}$$

Wir diagonalisieren G_N gemäß [7], p 6, mittels der unitären Matrix U_N

$$U_N^* G_N U_N = D_N^2 = diag\{\lambda_1^2,\dots,\lambda_N^2\} \tag{24}$$

und erhalten ein Orthogonalsystem in $H_{K,N}, L_1(x), \dots, L_N(x)$ mittels

$$\begin{pmatrix} L_1(x) \\ \dots \\ L_N(x) \end{pmatrix} = U_N^* \begin{pmatrix} K(x, x_1) \\ \dots \\ K(x, x_N) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Man rechnet direkt noch

$$Gram(L_1(x), \dots, L_N(x)) = (\lambda_m \lambda_n)_{m,n=1}^N \tag{26}$$

Also ist das Funktionensystem $\lambda_n(x) = L_n(x)/\lambda_n, n = 1 \dots N$ ebenfalls eine ONB für $H_{K,N} = span\{K(x, x_1, \dots, K(x, x_N)\}$. Die Eigenwerte $\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2$ von G_N spielen ersichtlich eine Rolle für die Beurteilung der Eigenschaften der Knoten $x_1, \dots, x_N \in G$ bzw. $\bar{G}_1$.

In [7], p11, wurde gezeigt:

Satz 12 *Die Interpolationsfunktion* $f_n(x) = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) l_n(x)$ *approximiert f(x) auf G Gleichmäßig und es gilt* $|f(x) - f_N(x)| \leq ||f|| T_H$*, wobei für totale* $(x_n)_n$ *gilt* $\lim_{n \to \infty} T_N = 0$

Bemerkung: Die Funktionen $l_1(x), \dots, l_N(x)$ hängen von $x_1, \dots, x_N$ und N ab.

Da wir uns in den Gruppen G bzw. $\bar{G}_1$ bewegen, ist es natürlich, den Fall zu betrachten, dass $x_0, \dots, x_{N-1}$ eine endliche zyklische Gruppe von Knoten ist. Dann ist offensichtlich die Matrix G_N zyklisch und sowohl G_N^{-1} als auch die $\lambda_0^2, \dots, \lambda_{N-1}^2$ lassen sich durch (schnelle) Fouriertransformationen explizit bestimmen.

Insbesondere sind die $l_0(x), \ldots, l_{N-1}(x)$ durch FT zu erhalten, wobei gilt $l_n(x) = l(x - x_n), n \ mod \ N$, sodass immer bloß $l_0(x)$ bestimmt werden muss.

Wir betrachten nun exemplarisch die wohl augenfälligste lokal kompakte Gruppe näher, nämlich $G = \mathbb{Z}$. Damit ist $\hat{G} = \hat{\mathbb{Z}} \cong \{x \in \mathbb{R}, mod \ 1\} \cong \{exp(2\pi ix), 0 \leq x < 1\}$, wobei $\hat{\mathbb{Z}}$ mit der Topologie des eindimensionalen Torus ausgestattet ist. Sei Γ die mit der diskreten Topologie ausgestattete Gruppe $\hat{G}$. Die Bohr-Kompaktifizierung der Gruppe $\mathbb{Z}, \bar{G} = \bar{\mathbb{Z}}$, besteht dann aus allen Charakteren von Γ und ist kompakt. Γ stellen wir auch multiplikativ durch $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ dar. Insbesondere ist $\mathbb{Z} \subset \bar{\mathbb{Z}}, \mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Z}}$ und $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ sind dicht in $\bar{\mathbb{Z}}$. Eine Gruppe heißt monothetisch wenn in ihr ein homomorphes Bild von $\mathbb{Z}$ dicht ist. Es gilt der bekannte Satz:

Satz 13 *Eine kompakte abelsche Gruppe ist genau dann monothetisch wenn ihre duale Gruppe eine Untergruppe von D ist. [6] [3]*

Sei $\bar{G}_1$ kompakt und metrisierbar sowie monothetisch. Dann ist $\Gamma_1 = \hat{\bar{G}}_1$ eine abzählbare Untergruppe von D und umgekehrt. Sei für ein $\theta \in G$ die Folge $(n\theta)_n$ dicht in $\bar{G}_1$. Wir betrachten die Diaphonie zum Kern $k(x), K(x, y) = k(x - y)$ auf $\bar{k}_1$, wobei $k(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} \hat{k}(\gamma)\gamma(x), \hat{k}(v) = 1, \hat{k}(\gamma) > 0$. Wir nannten solche Kerne zulässig.

Somit haben wir als k-Diaphonie

$$F_N^2 = \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2 = 1}^{N} k(n_2\theta - n_1\theta) - 1 \right| = \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2 = 1}^{N} \sum_{\gamma} \hat{k}(\gamma)\gamma((n_2 - n_1)\theta) - 1 \right| \quad (27)$$

also

$$F_N = \left| \sum_{\gamma \neq 0} \hat{k}(\gamma) \frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N - |n|)\gamma(n\theta) \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N - |n|)k(n\theta) - 1 \right|^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

Die Berechnung von F_N erfordert nur mehr $O(N)$ Rechenschritte.

Sei f(x) auf G stetig und $x_1, \ldots, x_N \in G$

Definition 9 *Wir nennen die Quadraturmethode*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \sim \int_G f(x) d\mu(x) \tag{29}$$

von erster Ordnung und die Methode

$$\frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2 = 1}^{N} f(x_{n_2} - x_{n_1}) \sim \int_G f(x) d\mu(x) \tag{30}$$

von zweiter Ordnung. Für die Knoten $x_n = n\theta, n \in \mathbb{Z}$ ergibt sich hier

$$\frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N - |n|) f(n\theta) \sim \int_G f(x) d\mu(x) \tag{31}$$

Für Fehlerabschätzungen betrachten wir Funktionen f(x) aus dem Hilbertraum H_K der vom Kern $K(t,x) = k(t-x)$ erzeugt wird.

Der Kern K(t,x) stellt sich im Sinne von (11) dar

$$K(t,x) = k(t-x) = \sum_{\gamma} \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(t)\bar{\hat{\alpha}}(\gamma)\overline{\gamma(x)} \tag{32}$$

wobei laut Voraussetzung $\sum |\hat{\alpha}(\gamma)|^2 < \infty, \hat{\alpha}(\gamma_0) = 1$ für den trivialen Charakter γ_0 und $\hat{\alpha}(\gamma) \neq 0$ für $\gamma \in \hat{G}$.

Es gilt der unmittelbar ersichtliche

Satz 14 *Die Funktionen $\varphi_\gamma(x) = \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(x)$ bilden eine ONB des Hilbertraums H_K mit dem reproduzierendem Kern K(t,x).*

Die Gruppe G wird durch

$$d(x,y) = d_K(x,y) = ||K(t,x) - K(t,y)|| \tag{33}$$

metrisiert. H_K besteht aus den stetigen Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \sum_\gamma \overset{o}{f}(\gamma)\varphi_\gamma(x), \sum_\gamma \left|\overset{o}{f}(\gamma)\right|^2 < \infty \tag{34}$$

Wir wenden zunächst die Methode erster Ordnung an:

$$R_N^{(1)}(f) = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n\theta) - \int_G f(x) d\mu(x) \right| \tag{35}$$

Mit der reproduzierenden Eigenschaft von K(t,x) erhalten wir

$$R_N^{(1)}(f) = \left| < f(t), \sum_{n=1}^{N} K(t,n\theta) - 1 > \right| \tag{36}$$

und mit der Cauchy-Ungleichung die Abschätzung

$$R_N^{(1)}(f) \leq ||f|| \left\| \sum_{n=1}^{N} K(t, n\theta) - 1 > \right\| = ||f|| F_N \tag{37}$$

Wir wenden nun auf f(x) die Methode zweiter Ordnung an:

Es ist

$$f(x) = \sum_{\gamma} \overset{o}{f}(\gamma)\varphi_\gamma(x) = \sum_{\gamma} \overset{o}{f}(\gamma)\hat{\alpha}(\gamma)\gamma(x) \tag{38}$$

mit

$$\sum_{\gamma} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 < \infty, \sum_{\gamma} |\hat{\alpha}(\gamma)|^2 < \infty, \sum_{\gamma} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \cdot \hat{\alpha}(\gamma) \right| < \infty \tag{39}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N - |n|) K(t, n\theta) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} (N - |n|) \sum_{\gamma} \varphi_\gamma(t) \bar{\varphi}_\gamma(n\theta) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} (N - |n|) \sum_{\gamma} \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(t)\bar{\hat{\alpha}}(\gamma)\bar{\gamma}(n\theta) \\
&= \sum_{\gamma} \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(t)\bar{\hat{\alpha}}(\gamma) \frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \bar{\gamma}(n\theta) \\
&= \sum_{\gamma} \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(t)\bar{\hat{\alpha}}(\gamma) \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2 \\
&= \sum_{\gamma} \varphi_\gamma(t)\bar{\hat{\alpha}}(\gamma) \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2
\end{aligned} \tag{40}$$

Dann ergibt sich mit der reproduzierenden Eigenschaft des Kernes $K(\cdot, x)$ für den Quadraturfehler der Methode zweiter Ordnung die folgende Reihendarstellung; γ_0 ist der triviale Charakter.

$$\begin{aligned} R_N^{(2)}(f) &= \left| \frac{1}{N^2} \right| \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N-|n|) f(n\theta) - \int_G f(x) d\mu(x) \\ &= \left| \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \overset{o}{f}(\gamma) \hat{\alpha}(\gamma) \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2 \right| \\ &= \left| \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left(\overset{o}{f}(\gamma) \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right| \right) \left(\hat{\alpha}(\gamma) \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right| \right) \right| \end{aligned} \tag{41}$$

Mit der Cauchy-Ungleichung erhalten wir:

$$R_N^{(2)}(f) \leq \left(\sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_N \tag{42}$$

Wir nennen die Funktion $F(x) = (Tf)(x)$,

$$F(x) := \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 \gamma(x) =: \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \hat{F}(\gamma) \gamma(x) \tag{43}$$

den Typ von $f(x) \in H_K$, wobei $\sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \hat{F}(\gamma) \right| < \infty$ erfüllt ist.
Wir erhalten

$$\left(\sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} (N-|n|) F(n\theta) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

Also ist

$$\left(\sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(R_N^{(2)}(F) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

und aus (42) folgt

$$R_N^{(2)}(f) \leq \left(R_N^{(2)}(F) \right)^{\frac{1}{2}} F_N \tag{46}$$

Man überzeugt sich leicht, dass (46) scharf ist für $\theta = 0$ und $\sum_{\gamma \neq \gamma_0} \bar{\hat{\alpha}}(\gamma)\varphi_\gamma(x)$, wobei ja $\varphi_\gamma(x) = \hat{\alpha}(\gamma)\gamma(x)$ gewählt wurde und $K(t,x) = \sum_\gamma \varphi_\gamma(t)\bar{\varphi}_\gamma(x)$ ist. Die Abschätzung (46) lässt sich sofort von $x_n = n\theta, n = 1, \ldots, N$, auf beliebige $x_1, \ldots, x_N \in G$ übertragen, wobei dann die Komplexität der Quadraturmethode von $O(N)$ auf $O(N^2)$ steigt. Für in G gleichverteilte Folgen $(x_n)_n$ gilt für Funktionen $f(x) \in H_K$ nicht nur $F_N \to 0$, sondern auch $R_N^{(2)}(F) \to 0$. Der Typ von f, $(Tf)(x) = F(x)$, beschreibt die "Glattheit"von $f(x) \in H_K$.

Die Abschätzung (46) ist somit auf H_K schärfer und differenzierter als die Methode erster Ordnung in (37)

Wir fassen zusammen:

Satz 15 *Ist* $f(x) \in H_K, f(x) = \sum_\gamma \tilde{f}(\gamma)\varphi_\gamma(x), (Tf)(x) = F(x) = \sum_{\gamma \neq \gamma_0} \left| \overset{o}{f}(\gamma) \right|^2 \gamma(x)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} R_N^{(1)}(f) &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_G f(x) d\mu(x) \right| \leq ||f|| \cdot F_N \\ R_N^{(2)}(f) &= \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n_1, n_2 = 1}^{N} f(x_{n_2} - x_{n_1}) - \int_G f(x) d\mu(x) \right| \leq \left(R_N^{(2)}(F) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot F_N \end{aligned} \tag{47}$$

Beide Abschätzungen sind scharf. Falls die Gruppe G monothetisch ist und θ ein

Generator von G ist, ist die Folge $(n\theta)_n$ gleichverteilt in G.

Wir betrachten nun das Interpolationsproblem auf monothetischen Gruppen. Die Interpolationsknoten $x_1, \ldots, x_N \in G$ sind gemäß (20) und Satz 11 zulässig, wenn die $K(t, x_1, \ldots, K(t, x_N))$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, also die Gram-Matrix regulär ist. Es gilt der

Satz 16 *Die Folge $K(t, n\theta)$ ist in H_K dann linear unabhängig, wenn $(n\theta)_n$ die kompakte abelsche Gruppe erzeugt.*

Beweis: Zunächst gilt, $(n\theta)_n$ ist genau dann dicht in G, wenn für alle $\gamma \in \hat{G}$ stets $\gamma(\theta) \neq 1$ ist, wobei $\gamma \neq \gamma_0$ ein beliebiger nichttrivialer Charakter ist. Wäre nämlich für ein $\gamma \neq \gamma_0$ $\gamma(\theta) = 1$, so wäre $\gamma(n\theta) = 1$ für alle n, also $\gamma(x) = 1$ für alle $x \in G$, falls $(n\theta)_n$ dicht in G ist.

Ist umgekehrt $\gamma(\theta) \neq 1$ für alle $\gamma_0 \neq \gamma \in G$, so gilt für $\gamma \neq \gamma_0$

$$\lim_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \gamma(n\theta) \right| \leq \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N|1-\gamma(\theta)|} = 0 \tag{48}$$

also ist $(n\theta)_n$ gleichverteilt, also dicht, in G. Sind weiters $\gamma_1 \neq \gamma_2$ aus $\hat{G}$, so ist $\gamma_1(\theta) \neq \gamma_2(\theta)$, sonst wäre $\gamma(\theta) := \gamma_1(\theta)\overline{\gamma_1(\theta)} = 1$ und somit $\gamma = \gamma_0$ und $\gamma_1 = \gamma_2$.
Wir zeigen nun, dass $\{K(t, n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig ist, falls θ ein Generator von G ist. Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $\varphi_\gamma =$

$\hat{k}(\gamma)^{\frac{1}{2}}\gamma, \hat{k}(\gamma) > 0$ und für $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n K(t, n\theta) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} \varphi_\gamma(t) \hat{k}(\gamma)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \gamma(n\theta) \tag{49}$$

Dann ist $f(t) = 0 \in H_K$, genau wenn

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \gamma(n\theta) = 0 \textit{ für alle } \gamma \in \hat{G} \tag{50}$$

Das Polynom $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n z^n$ hat nur dann die unendlich vielen verschiedenen Lösungen $z_\gamma = \gamma(\theta)$, wenn $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$, was zu zeigen war, abgesehen vom Fall $\#G < \infty$.

Korollar 1 *Die Gramschen Matrizen der* $(K(t, n\theta))_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$G_N = (k((n-m)\theta))_{m,n=0}^{N-1} \tag{51}$$

sind nicht singulär und offensichtlich Toeplitz. Falls der Kern $k(x)$ *symmetrisch ist,* $k(-x) = k(x)$*, ist* G_N *ebenfalls symmetrisch, also* G_N *persymmetrisch.*

Analog gilt der

Satz 17 *Ist* G *kompakt und ist* $G_N = \{nx, n = 0, \ldots, N-1\}, \#G_N = N$*, eine Untergruppe von* G*, ist weiters* $K(t,x) = k(t-x), \hat{k}(\gamma > 0$ *für* $\gamma \in \hat{G}$*, so ist* *Gram*$(K(t,0), K(t,x_1), \ldots, K(t,(N-1)x_1))$ *regulär.*

Beweis: Für $\gamma \in \hat{G}$ und $x_n \in G_N$ ist $\gamma(x_n)$ eine N-te Einheitswurzel, die auch auftritt. Sei

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n K(t, nx_1) = 0 \in H_K \tag{52}$$

Dann ist wegen $\hat{k}(\gamma) > 0$ für $\gamma \in \hat{G}$

$$f(t) = \sum_{\gamma} \gamma(t)\hat{k}(\gamma) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \gamma(nx_1) = 0 \tag{53}$$

genau wenn

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \gamma(nx_1) = 0 \textit{ für alle } \gamma \in \hat{G} \tag{54}$$

Das Polynom

$$P_{N-1}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \tag{55}$$

hat $deg(P_{N-1}) \leq N-1$ und die Einheitswurzeln $z_0, \ldots, z_{N-1}$ als Nullstellen, also gilt $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$. Somit sind die $K(t,0), K(t,x_1), \ldots, K(t,x_{N-1})$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig.

Folgerung: Unter den Voraussetzungen von Satz 16 und Satz 17 gelten die Interpolationsmethoden (20), (22) und Satz 11 ist anwendbar, da die Gram'sche Matrix invertierbar ist.

Wir betrachten nun drei naheliegende Beispiele in $\mathbb{Z}$ bzw. der Bohrkompaktifizierung. Die duale Gruppe zu $\mathbb{Z}$ ist $\hat{\mathbb{Z}} \cong [0,1)$ mod 1. Die Diskretisierung von $\hat{\mathbb{Z}}$ ist isomorph zur diskreten multiplikativen Gruppe $D = \{z, |z| = 1\}$

1. Sei $\mathbf{\Gamma} = \{z_\alpha^m, m \in \mathbb{Z}\} = \{exp(2\pi i\alpha m) = z_\alpha^m\}, \alpha \notin \mathbb{Q}$

2. Seien für $s \geq 2$ die $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und $z_1 = exp(2\pi i\alpha_1), \ldots, z_s = exp(2\pi i\alpha_s)$. $\mathbf{\Gamma_s}$ ist die diskrete Untergruppe von D:
   $\mathbf{\Gamma}_s = \{z_1^{m_1}, z_2^{m_2}, \ldots, z_s^{m_s}, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\}$

3. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \cdots \in \mathbb{R}$ und über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und sei $z_n = exp(2\pi i\alpha_n), n = 1, 2, \ldots$, dann sei
   $\mathbf{\Gamma}_\infty = \{\prod_{n=1}^{\infty} z_n^{m_n}, m_n \in \mathbb{Z}$, endlich viele $m_n \neq 0\}$

Offensichtlich gilt

$$\hat{\Gamma}_1 \cong T_1 := \{x \in \mathbb{R} \;\; mod\; 1/\alpha\} =: \bar{G}_1$$

$$\hat{\Gamma}_s \cong T_s := \{(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s, x_n \;\; mod\; 1/\alpha_k, k = 1, \ldots, n\} =: \bar{G}_s$$

$$\hat{\Gamma}_\infty \cong T_\infty := \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty, x_n \;\; mod\; 1/\alpha_n\} =: \bar{G}_\infty$$

Wir betrachten die Annihilatoren von $\Gamma_1, \Gamma_s, \Gamma_\infty$ in $\mathbb{Z}$

$$Ann(\Gamma_1) = \{\bar{x} \in \bar{\mathbb{Z}}\gamma(\bar{x}) = 1 \; f\ddot{u}r\; \gamma \in \Gamma_1\} =: \bar{H}_1$$

$$Ann(\Gamma_s) = \{\bar{x} \in \bar{\mathbb{Z}}\gamma(\bar{x}) = 1 \; f\ddot{u}r\; \gamma \in \Gamma_s\} =: \bar{H}_s$$

$$Ann(\Gamma_\infty) = \{\bar{x} \in \bar{\mathbb{Z}}\gamma(\bar{x}) = 1 \; f\ddot{u}r\; \gamma \in \Gamma_\infty\} =: \bar{H}_\infty$$

Wir nannten solche Annihilatoren $\bar{H}$ Perioden. Es ist nach (1)

$$\hat{\bar{H}}_1 \cong D/\Gamma_1, \hat{\bar{H}}_s \cong D/\Gamma_s, \hat{\bar{H}}_\infty \cong D/\Gamma_\infty \tag{56}$$

sowie

$$\bar{G}_1 \cong \bar{\mathbb{Z}}/\bar{H}_1, \bar{G}_s \cong \bar{\mathbb{Z}}/\bar{H}_s, \bar{G}_\infty \cong \bar{\mathbb{Z}}/\bar{H}_\infty \tag{57}$$

Wir betrachten nun die ganzzahligen Perioden

$$H_1 := \mathbb{Z} \cap \bar{H}_1, H_s := \mathbb{Z} \cap \bar{H}_s, H_\infty := \mathbb{Z} \cap \bar{H_\infty}, \tag{58}$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : z_\alpha^{xm} = 1, \forall m \in \mathbb{Z}\} = \{0\} \\ H_s &= \{x \in \mathbb{Z} : (z_{\alpha_1}^{m_1}, \ldots, z_{\alpha_s}^{m_s})^x = 1, \forall m_{1,\ldots,s} \in \mathbb{Z}\} = \{0\} \\ H_\infty &= \{x \in \mathbb{Z} : (z_{\alpha_{n_1}}^{m_{n_1}}, \ldots, z_{\alpha_{n_\infty}}^{m_{n_\infty}})^x = 1\} = \{0\} \end{aligned} \tag{59}$$

Die ganzzahligen Perioden sind hier also trivial.

Wir betrachten nun $\mathbb{R}$ als Untergruppe von $\bar{\mathbb{Z}}$:

Es gilt für $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $z, z_1, z_2 \in D$

$$z^{r_1+r_2} = z^{r_1} z^{r_2}, (z_1 z_2)^r = z_1^r z_2^r \tag{60}$$

Die reellen Zahlen r sind also Charaktere von D, es gilt $\bar{\mathbb{Z}} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ in $\bar{\mathbb{Z}}$ dicht ist, ist $\mathbb{R}$ ebenfalls dicht in $\bar{\mathbb{Z}}$.

Wir betrachten nun die Perioden in $\mathbb{R}$:

$$\bar{H}_1 \cap \mathbb{R} = \{r \in \mathbb{R} : z_\alpha^{rm} = 1, \forall m \in \mathbb{Z}\} = \{n/\alpha, n \in \mathbb{Z}\} \tag{61}$$

Für $s \geq 2$ gilt

$$\bar{H}_s \cap \mathbb{R} = \{r \in \mathbb{R} : (z_{\alpha_1}^{m_1}, z_{\alpha_2}^{m_2}, \dots, z_{\alpha_s}^{m_s})^r = 1, \forall m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\} = \{0\} \tag{62}$$

da die $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

Wir betrachten nun die zu $\Gamma_1, \Gamma_s, \Gamma_\infty$ gehörigen Räume fastperiodischer Funktionen P auf der LCA Gruppe $\mathbb{Z}$:

$$P(\Gamma_1) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ f \textit{ wird durch } L(\Gamma_1) \textit{ gleichmäßig approximiert}\} \tag{63}$$

wobei $L(\Gamma_1)$ die Menge aller Linearkombinationen von $\gamma \in \Gamma_1$ sei. Es ist also gemäß (61) $f \in P(\Gamma_1)$, genau wenn $f(x)\ mod\ \bar{H}_1$ zu einer stetigen $F(\bar{X}) \in C(\bar{G}_n)$ fortsetzbar ist, also zu einer stetigen Funktion $f(\bar{x})$ auf $\bar{\mathbb{Z}}$ fortsetzbar ist.

Analog werden die fastperiodischen Funktionen aus $P(\Gamma_s), P(\Gamma_\infty)$ durch gleichmäßige Approximation mittels trigonomtrischer Polynome aus Γ_s bzw. Γ_∞, mod $\bar{H}_s$ bzw. $\bar{H}_\infty$, definiert.

Es handelt sich hier also um fastperiodische Folgen über $\mathbb{Z}$.
Ergänzend betrachten wir die Gruppe $\mathbb{R}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \overline{\overline{\mathbb{Z}}}$:
Sei $Q(\Gamma_1)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich durch trigonometrische Polynome aus $\Gamma_1 = \{z_\alpha^n, n \in \mathbb{R}\}$ gleichmäßig approximieren lassen. Das sind hier die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}\ mod\ \frac{1}{\alpha}$. Analog besteht $Q(\Gamma_s)$ aus allen Funktionen

$$f(r) = F((\alpha_1, \dots, \alpha_s)r) \tag{64}$$

wo $F((\alpha_1,\dots,\alpha_s)r)\in C(\bar G_s), x_k \bmod \frac{1}{\alpha_k}, k=1,\dots,s$ ist.

Für $s=\infty$ sind dies die

$$\begin{aligned} f(r) = F((\alpha_n)_n r),\ \alpha_n r \bmod 1/\alpha_n, \\ F\in C(\bar G_\infty),\ F((\alpha_n)_n),\ x_n\ mod\ 1/\alpha_n \end{aligned} \tag{65}$$

Für $s=1$ sind die $f(r)$ $\frac{1}{\alpha}$-periodisch für $\alpha\geq s\geq 2$ sind die $f(r)$ aperiodisch oder konstant.

Da $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$, ist $\mathbb{Z}$ isomorph in $\bar G_s, 1\leq s\leq\infty$, enthalten. Wir betrachten nun die Mittel $M(f)$ auf $P(\Gamma_s),\ Q(\Gamma_s),\ 1\leq s\leq\infty$, sowie die Γ_s-Gleichverteilung von Folgen in $\mathbb{Z},\mathbb{R},\overline{\mathbb{Z}}$:

Die Γ_s-Gleichverteilung einer Folge $(\bar x_n)$ mod $\bar H_s$ in $\overline{\mathbb{Z}}$ bedeutet

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\gamma(\bar x_n)=0\ \textit{für alle}\ \gamma\in\Gamma_s \tag{66}$$

Wir bezeichneten Kerne $k(x)$ als zulässig, wenn

$$\begin{aligned} k(x)=(\alpha*\alpha^*)(x)=\sum_\gamma\hat\alpha(\gamma)\overline{\hat\alpha}(\gamma)\gamma(x)=\sum_\gamma\hat k(\gamma)\gamma(x) \\ \textit{mit}\ \hat\alpha(\gamma)\neq 0, |\hat\alpha(0)|=1,\ \textit{also}\ \hat k(\gamma)>0, \hat k(0)=1 \end{aligned} \tag{67}$$

Seien also $k_1(\bar X), k_s(\bar X), k_\infty(\bar X)$ zulässige Kerne auf $\bar G_1,\bar G_s,\bar G_\infty$. Diese Kerne sind fastperiodische Funktionen bezüglich $\Gamma_1,\Gamma_s,\Gamma_\infty$ auf $\mathbb{Z}$ bzw. auf $\mathbb{R}$.

Auf $\bar G_1,\bar G_s,\bar G_\infty$ bzw. $\mathbb{Z},\mathbb{R},\overline{\mathbb{Z}}$ werden (mod $\overline{H}_1,\overline{H}_s,\overline{H}_\infty$) Diaphonien für $i=1,s,\infty$

erklärt:

$$
\begin{aligned}
F_M^{(i)2} :&= \frac{1}{M^2} \sum_{m_1, m_2 = 1}^{M} k(x_{m_2} - x_{m_1}) - 1 \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_i}{}' \hat{k}(\gamma) \frac{1}{M^2} \left| \sum_{m=1}^{M} \gamma(x_m) \right|^2
\end{aligned}
\tag{68}
$$

wobei $\sum_\gamma' = \sum_{\gamma \neq 0}$ bedeuten soll.

Es gilt offensichtlich für alle nichttrivialen $\gamma \in \Gamma_i, i = 1, s, \infty$,

$$
\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \gamma(n) = 0 \tag{69}
$$

$$
\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \gamma(r) dr = 0 \tag{70}
$$

Damit ergeben sich auf den Räumen fastperiodischer Funktionen $P(\Gamma_i), Q(\Gamma_i), i = 1, s, \infty$, die Mittel für $f \in P(\Gamma_i), f \in Q(\Gamma_i)$:

$$
M^{(i)}(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(n) \tag{71}
$$

für $f \in P(\Gamma_i)$ bzw. für $f \in Q(\Gamma_i)$

$$
M^{(i)}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(r) dr \tag{72}
$$

Es ergibt sich wegen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \gamma(x_n) = 0, \gamma \neq 0 \tag{73}$$

dass die Folge $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ in $\overline{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, jeweils $(mod\ \bar{H}_i, i = 1, s, \infty$, Γ_i-gleichverteilt ist.

Wie bereits festgehalten, sind die Mittel $M^{(i)}(f)$ gleich den Haarintegralen der stetigen Fortsetzungen von f auf die Gruppen $\overline{G}_i$ bzw. die Integrale der auf $\overline{\mathbb{Z}}$ stetig fortgesetzten Funktionen nach den auf $\overline{\mathbb{Z}}$ übertragenen jeweiligen Haarmaßen von $\bar{G}_1, \bar{G}_s, \bar{G}_\infty$, welche letztere auf $\bar{G} = \overline{\mathbb{Z}}$ natürlich keine Haarmaße sind.

Die Kerne $k_i, i = 1, s, \infty$ erzeugen Hilberträume stetiger Funktionen auf $\overline{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$. Auf diesen gilt dann gemäß Satz 11 die Abschätzung

$$R_N(f) = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - M(f) \right| \leq ||f|| \cdot F_N \tag{74}$$

wobei sich für Folgen $x_n = nx_1, n \in \mathbb{Z}$ die Fehlerabschätzung für die Methode zweiter Ordnung gemäß (47) verschärfen lässt. Darüber hinaus sind die Gramschen Matrizen der $K(t, n), n = 0, \pm 1, \ldots$ regulär, was zu Interpolationsmethoden für diese fastperiodischen Funktionen führt. Für konkrete quantitative Abschätzungen sind etwa die

Korobow-Kerne nützlich:

$$k(x_1,\dots,x_s)=\sum_{m_1,m_s=-\infty}^{\infty}(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_s)^{-2}exp(2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s))$$
$$\bar{m}=max(1,|m|) \tag{75}$$

Es steht das gut bekannte Arsenal an zahlentheoretischen Integrationsmethoden zur Verfügung, was hier nicht weiter ausgeführt wird.

Wir betrachten abschließend Banachräume (fastperiodischer) Funktionen auf monothetischen Gruppen, die bestmögliche Quadraturmethoden zulassen:
Sei wieder G_1 eine kompakte abelsche Gruppe mit diskreter Dualgruppe $\hat{G}_1 =: \Gamma_1$. Sei G_1 monothetisch, also ist Γ_1 Untergruppe der Diskreten Gruppe $D=\{z:|z|=1\}$. Wir betrachten $A=\{f(x):\sum_\gamma\left|\hat{f}(\gamma)\right|<\infty\}$, $||f||_1:=\sum_\gamma\left|\hat{f}(\gamma)\right|$. Also ist$A\cong l_1(\Gamma_1)$. Sei $\sum_\gamma'$ definiert als Summe über alle nichttrivialen $\gamma\in\Gamma_1$. Sei x_0 ein Generator von G_1, also sind die Folgen $x_n=nx_0, n\in\mathbb{Z}$ bzw. $n\in\mathbb{N}_0$ dicht in G_1, wobei fast alle $x\in G_1$ Generatoren sind. Das Element $x_0\in G_1$ ist genau dann Generator von G_1, wenn für alle nichttrivialen $\gamma\in\Gamma_1$ gilt $\gamma(x_0)\neq 1$. Sei für x_0 $S_N(\gamma)=\sum_{n=0}^{N-1}\gamma(nx_0)$. Dann gilt für den trivialen Charakter $\gamma_0: S_N(\gamma_0)=N$ und für $\gamma\neq\gamma_0$:

$$S_N(\gamma)=(1-\gamma(Nx_0))/(1-\gamma(x_0)) \tag{76}$$

Auf der Klasse A gilt für $x_n=nx_0, n=0,1,2,\dots$

$$R_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}N-1f(nx_0)-\int_{G_1}f(x)dx=\frac{1}{N}\sum_\gamma{}'\hat{f}(\gamma)S_N(\gamma) \tag{77}$$

wobei dx das Haarmaß auf G_1 ist.

Es gilt der einfache

Satz 18 *Auf der Klasse A ist $R_N(f) = o(\frac{1}{N})$ nicht möglich.*

Beweis: Sei $\gamma \in \Gamma_1$ nicht trivial. Angenommen es gibt ein $x_0 \in G_1$, so dass

$$R_N(\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \gamma()nx_0 = o(\frac{1}{N}) \tag{78}$$

Dann wäre

$$S_N(\gamma) = O(1),\ S_{N+1}(\gamma) = o(1) \tag{79}$$

Also auch

$$S_{N+1}(\gamma) - S_N(\gamma) = \gamma(Nx_0) = o(1) \tag{80}$$

für $N \to \infty$. Widerspruch!, da $|\gamma| = 1$. W.z.z.w.

Da für die Quadraturfehler $\hat{f}(0)$ keine Rolle spielt, sei o.B.d.A. $\hat{f}(0) = 0$. Sei nun für den Generator x_0

$$A_{x_0} = A_{x_0}(G_1) = \left\{ f : \sum_{\gamma}{}' \left| \hat{f}(\gamma) \right| \cdot (2|1 - \gamma(x_0)|^{-1}) < \infty \right\} \tag{81}$$

A_{x_0} wird mit $||f||_{x_0} = \sum_{\gamma}{}' \left| \hat{f}(\gamma) \right| (2|1 - \gamma(x_0)|^{-1})$ zu einem Banachraum, dessen Dualraum aus allen $(d_\gamma)_\gamma, \gamma$ besteht, für die mit beschränkten δ_γ gilt $d_\gamma = b_\gamma \cdot 2|1 - \gamma(x_0)|^{-1}$, wobei die Norm des entsprechenden Funktionals gerade die l_∞-Norm der $(b_\gamma)_\gamma$ ist.

Offensichtlich ist A_{x_0} eine dichte Teilmenge des Banachraums A. Die Funktionale von A_{x_0} werden durch die absolut konvergenten Reihen

$$\sum_{\gamma}{}' 2(|1-\gamma(x_0)|^{-1})b\gamma = \sum_{\gamma}{}' \hat{f}(\gamma)d_\gamma \tag{82}$$

dargestellt.

Es ergibt sich der

Satz 19 *Für $f \in A_{x_0}$ gilt $|R_N(f)| \leq \frac{1}{N}||f||_{x_0}$*

Beweis:

$$|R_N(f)| = \left|\sum_{\gamma}{}' \frac{1}{N}\hat{f}(\gamma) \cdot \frac{1-\gamma(Nx_0)}{1-\gamma(x_0)}\right| \leq \left(\left|\sum_{\gamma}{}' \left|\hat{f}(\gamma)\right| \frac{2}{|1-\gamma(x_0)|}\right|\right) \frac{1}{N} = \frac{1}{N}||f||_{x_0} \tag{83}$$

Die Funktion $\Gamma_1 \to \mathbb{R}, \gamma \to |1-\gamma(x_0)|$ beschreibt das diophantische Verhalten des Generators $x_0 \in G_1$. Wir betrachten dies nun auf $T^s = [0,1)^s \mod 1$. Sei $x_0 = \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \in T^s$, wobei die $\theta_1, \ldots, \theta_s$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sein sollen, also $m_1\theta_1 + \cdots + m_s\theta_s \notin \mathbb{Z}$ für $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{R}^s$, für $\vec{m} \neq \vec{0}$ gilt. Sei

$$S_N(\vec{m}\vec{\theta}) = \sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi i(m_1\theta_1 + \cdots + m_s\theta_s)) \tag{84}$$

also

$$\left|S_N(\vec{m}\vec{\theta})\right| = \left|\frac{1-exp(2\pi i N\vec{m}\vec{\theta})}{1-exp(2\pi i\vec{m}\vec{\theta})}\right| \tag{85}$$

Wenn wir mit $\langle\langle x\rangle\rangle$ den Abstand von $x \in \mathbb{R}$ zur nächsten ganzen Zahl bezeichnen, ist offenbar

$$\left|S_N(\vec{m}\vec{\theta})\right| = \left|\frac{sin(\pi N\vec{m}\vec{\theta})}{sin(\pi\vec{m}\vec{\theta})}\right| \leq \frac{1}{2\langle\langle\vec{m}\vec{\theta}\rangle\rangle} \tag{86}$$

Im Sinne der Definition von A_{x_0} wird der Banachraum stetiger Funktionen am s-Torus für $x_0 = \vec{\theta}$ definiert durch

$$A_{\vec{\theta}} = \left\{ f \in C(T^s) : \sum_{\vec{m}}{}' \left|\hat{f}(\vec{m})\right| \frac{1}{2\langle\langle\vec{m}\vec{\theta}\rangle\rangle} < \infty \right\} \tag{87}$$

mit der Norm

$$||f||_{\vec{\theta}} = \sum_{\vec{m}}{}' \left|\hat{f}(\vec{m})\right| \frac{1}{2\langle\langle\vec{m}\vec{\theta}\rangle\rangle} \tag{88}$$

Aus Satz 19 folgt offensichtlich der

Satz 20 *Sind die $\theta_1, \ldots, \theta_s$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, so gilt für Integranden $f(\vec{x}) \in A_{\vec{\theta}}$ die Fehlerabschätzung*

$$|R_N(f)| \leq \frac{1}{N}||f||_{\vec{\theta}} \tag{89}$$

Die Norm des Funktionals R_N ist auf $A_{\vec{\theta}}$:

$$||R_N|| = \frac{1}{N} \tag{90}$$

R_N ist auf $A_{\vec{\theta}}$ der Ordnung nach nicht verbesserbar.

Sei $V(\vec{m}) = \prod_{k=1}^{s} max(1, |m_k|)$. Wir erinnern a den gut bekannten Sachverhalt: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest, dann gibt es zu fast allen $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in T^s = [0,1)^s$

eine Konstante $C(\vec{\theta}) > 0$, so dass für alle $\vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$ gilt:

$$\langle\langle \vec{m}\vec{\theta} \rangle\rangle \geq C(\vec{\theta}) \frac{1}{V(\vec{m})^{1+\varepsilon}} \tag{91}$$

also

$$\frac{1}{\langle\langle \vec{m}\vec{\theta} \rangle\rangle} \leq \frac{1}{C(\vec{\theta})} V(\vec{m})^{1+\varepsilon} \tag{92}$$

Definition 10 *Sei A_ε der Banachraum der Funktionen*

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}}{}' \hat{f}(\vec{m}) exp(2\pi i \vec{m}\vec{x}) \tag{93}$$

mit

$$||f||_\varepsilon = \sum_{\vec{m}}{}' \left| \hat{f}(\vec{m}) \right| \cdot V(\vec{m})^{1+\varepsilon} < \infty \tag{94}$$

Wegen (92) ist

$$||f||_{\vec{\theta}} \leq \frac{1}{C(\vec{\theta})} ||f||_\varepsilon \tag{95}$$

also gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und fast alle $\vec{\theta} \in T^s$

$$A_\varepsilon \subseteq A_{\vec{\theta}} \tag{96}$$

Aus Satz 20 folgt sofort

Satz 21 *Ist $f \in A_\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und gilt für $\vec{\theta}$ (91), so ist*

$$|R_N(f)| = \frac{1}{N} |R_N(f)| \leq \frac{1}{N \cdot C(\vec{\theta})} ||f||_\varepsilon \tag{97}$$

Der Beweis erfolgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}|R_N(f)| &= \frac{1}{N}\left|{\sum_{\vec{m}}}' f(\vec{m})\frac{1-exp(2\pi iN\vec{m}\vec{\theta})}{1-exp(2\pi i\vec{m}\vec{\theta})}\right| \\ &\leq \frac{1}{N}{\sum_{\vec{m}}}'|f(\vec{m})|\frac{V(\vec{m})^{1+\varepsilon}}{C(\vec{\theta})} \\ &= \frac{1}{N}\frac{1}{C(\vec{\theta})}||f||_\varepsilon\end{aligned} \tag{98}$$

Bemerkung: Die berühmten Ergebnisse von A.Baker und W.Schmidt über die Simultanapproximation von Zahlen mit rationalen Logarithmen bzw. von algebraischen Zahlen liefern für jedes $\varepsilon > 0$ Beispiele für $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ gemäß (91) und konkretisieren unsere metrische Aussage (91).

Die Banachräume von Funktionen und die Fehlerabschätzungen in den Sätzen 19, 20, 21 betreffen monothetische Gruppen und lassen sich modulo der Annihilatoren der entsprechenden Dualgruppe unmittelbar auf die Bohrkompaktifizierung $\overline{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$, sowie auf die in $\overline{\mathbb{Z}}$ dichte Gruppe $\mathbb{R}$ übertragen, was zu entsprechenden Banachräumen fastperiodischer Funktionen und Quadraturmethoden dort selbst führt. Quadratur bedeutet also hier die angenäherte Berechnung des Haarintegrals über $\bar{G}_1$ bzw. $\overline{\mathbb{Z}}$ beziehungsweise des Mittels $M(f)$. Die qualitativen Ergebnisse und auch die quantitativen Ergebnisse übertragen sich offensichtlich gemäß Satz 2 pp.

Literaturverzeichnis

[1] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels*. Trans. Hm. Math. Soc 68, 1950.

[2] H. Meschkowski. *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*. Grundlehren, Band 113. Springer, 1962.

[3] H. Niederreiter und L. Kuipers. *Uniform distribution of sequences*. Wiley, 1974.

[4] M. Drmota und R. F. Tichy. *Sequences, Discrepancies and Applications*. Lecture Notes in Mathematics 1651. Springer, 1997.

[5] N. Korobow. *Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Mathematik*. Russisch. Fismatgis, 1962.

[6] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. John Wiley, 1962.

[7] P. Zinterhof. *Über Punktfolgen, Hilberträume mit reproduzierendem Kern, Integration und Interpolation*. In preprints.zinterhof.com/, 2022.